ЛЕКЦІЯ № 6

Рух в неінерціальній системі відліку.

У попередніх двох лекціях ми познайомилися з перетвореннями системи координат, які не змінювали функцію Лагранжа і завдяки яким ми отримали інтеграли руху. Окрім того, ми дослідили як пов'язані ці інтеграли руху в різних інерціальних системах відліку. В цій лекції ми звернемось до іншого типу перетворень, що пов'язані із переходом до рухомої, але неінерціальної системи відліку. Важливі завдання, пов'язані з рухом в неінерційних системах відліку, виникають, наприклад, при визначенні механічного руху в умовах Землі, що обертається. Хоча, здавалося б, через малу швидкість її обертання, цими ефектами можна знехтувати. Однак не завжди це так. Зокрема, ми згадаймо дискусію Ньютона і Гука щодо вільного падіння тіла на поверхні землі, що обертається.

Згідно Ньютону швидкість руху поверхні Землі на широті ϑ північної півкулі дорівнює $V = \Omega R \cos\vartheta$, де Ω – частота обертання Землі і $R-$ її радіус. Швидкість обертання точки на висоті h над поверхнею дорівнює $v = \Omega\left(R+h\right)\cos\vartheta$. Різниця швидкостей становить $\Delta V = \Omega h \cos\vartheta$. Час вільного падіння з висоти в поле тяжіння Землі дорівнює $\tau = \sqrt{2h/g}$. Отже, виходить, що тіло відхилиться на схід на величину $l = \sqrt{2}\Omega h^{3/2}\cos\vartheta/\sqrt{g}$. Насправді, відхилення складе $l = (\sqrt{2}\Omega h^{3/2}\cos\vartheta/\sqrt{g})\cdot 2/3$. Таким чином, незважаючи на повільність обертання Землі, помилка виявилася не малою поправкою до результату, а значною. Вона пов'язана з тим, що задачу необхідно вирішувати в системі координат, пов'язаної з Землею, яка не є інерціальною.

До цього часу ми розглядали динаміку лише в інерціальній системі відліку. Саме з властивостями інерціальної системи: однорідністю і ізотропією простору і однорідністю часу, був пов'язаний отриманий вид функції Лагранжа матеріальної точки

$$L_0 = \frac{m\vec{v}_0^{\,2}}{2} - U \tag{31.1}$$

і вид рівняння Лагранжа

$$m\frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\,. \tag{31.2}$$

Основним при переході до неінерційних систем відліку є той факт, що вид рівняння Лагранжа, отриманий з принципа найменшої дії, не залежить від того, в якій системі відліку ми вирішуємо задачу:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}. \tag{31.3}$$

Саме в функції Лагранжа ми проводили всі перетворення координат і швидкостей при переході до узагальнених координат. Тому, при переході до неінерціальної системі необхідно провести відповідні перетворення саме в функції Лагранжа.

На першому кроці розглянемо перетворення лагранжіана при переході від інерціальної системи K_0 до системи K', що рухається відносно K_0 зі швидкістю $\vec{V}(t)$. Змінюємо систему відліку і вводимо нову, взагалі кажучи, не пов'язану з рухомим в вихідній системі тілом. Важливо, що величина і напрямок швидкості $\vec{V}$ залежить тепер від часу, і система K' не є інерціальною. Швидкості $\vec{v}_0$ і $\vec{v}'$ в системах K_0 і K' пов'язані співвідношенням:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t). \tag{31.4}$$

Тут ми розглядаємо цей перехід у фіксований момент часу, тому в потенційній енергії замінюємо $\vec{r}_0$ на $\vec{r}'$. Підставляючи заміну (31.4) в (31.1), отримуємо

$$L' = \frac{m}{2}\vec{v}'^2 + m\vec{v}'\vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V}^2 - U(\vec{r}'). \tag{31.5}$$

Третій доданок може бути відкинуто, як похідна за часом від деякої функції часу, а друге – перетворено таким чином:

$$m\vec{V}\vec{v}' = m\vec{V}\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\vec{r}'\right) - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\vec{r}'\right) - m\vec{r}'\vec{W}, \tag{31.6}$$

де перший доданок може бути також відкинуто, і введено позначення $\vec{W} = \dot{\vec{V}}$ для прискорення неінерціальної системи K'.

$$L' = \frac{m}{2}\vec{v}'^2 - U(\vec{r}') - m\vec{W}\vec{r}', \tag{31.7}$$

і поява додаткового доданка в L' призводить до додаткової ефективної силі в рівнянні

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t). \qquad (31.8)$$

На другому кроці вводимо нову систему K, що обертається щодо K' з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}(t)$. Змінюємо систему координат, але не рух самого тіла в лабораторній системі. Воно залишається незмінним. При цьому вираз для швидкості в новій системі відліку пов'язано зі старим виразом співвідношенням

$$\vec{v}' = \vec{v} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]. \qquad (31.9)$$

У фіксований момент часу при такому переході змінюються швидкості, але не самі координати. Виробляючи таку заміну в (31.7), отримуємо остаточне вираз для функції Лагранжа в системі K:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - U(\vec{r}) - m\vec{W}\vec{r} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]^2. \qquad (31.10)$$

Обчислимо повний диференціал Лагранжіана:

$$dL = -\left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + m\vec{W}\right)d\vec{r} + \left(m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]\right)d\vec{v} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega} \times d\vec{r}\right] + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]\left[\vec{\Omega} \times d\vec{r}\right].$$

(31.11)

Згрупуємо складові з $d\vec{r}$ і $d\vec{v}$:

$$dL = \left(m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right]\right)d\vec{v} + \left(m\left[\vec{v} \times \vec{\Omega}\right] + m\left[\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \times \vec{\Omega}\right] - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W}\right)d\vec{r}. \qquad (31.12)$$

Незалежне варіювання координати і швидкості дає

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right], \qquad (31.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\left[\vec{v} \times \vec{\Omega}\right] + m\left[\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \times \vec{\Omega}\right] - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W}, \qquad (31.14)$$

і після підстановки в (31.3) отримуємо остаточне рівняння руху:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + m\left[\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}\right] + 2m\left[\vec{v}\times\vec{\Omega}\right] + m\left[\vec{\Omega}\times\left[\vec{r}\times\vec{\Omega}\right]\right]. \qquad (31.15)$$

Найбільш цікавим з практичної точки зору є система K, що обертається с постійною швидкістю, $\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}_0 = const$, $\vec{V}(t) = 0$, відносно вихідної системи K_0. Швидкості $\vec{v}_0$ і $\vec{v}$ в системах K_0 і K пов'язані співвідношенням: $\vec{v} + \left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right] = \vec{v}_0$. Відповідно до (31.10) функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - U\left(\vec{r}\right) + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right]^2.$$

Розрахуємо імпульс у новій системі та впевнемось, що він співпадає із імпульсом у вихідній системі:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right] = m\vec{v}_0 = \vec{p}_0.$$

Також розрахуємо енергію у новій системі

$$E = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\vec{v} - L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right]^2 + U\left(\vec{r}\right).$$

Якщо тепер знову повернутись у цьому виразі до швидкостей у вихідній системі K_0 та використати, що $\vec{p} = \vec{p}_0$, то

$$E = \frac{m}{2}\vec{v}_0^2 + U\left(\vec{r}\right) - m\vec{v}_0\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right] = E_0 - \left[\vec{r}\times\vec{p}_0\right]\vec{\Omega} = E_0 - \vec{M}\vec{\Omega},$$

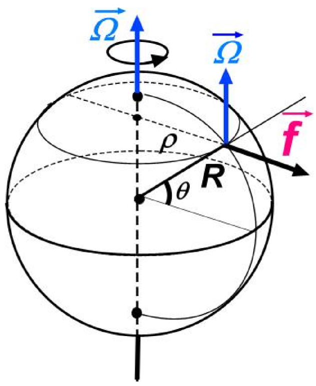
де $\vec{M} = \left[\vec{r}\times\vec{p}\right]$ – момент імпульса у новій системі.

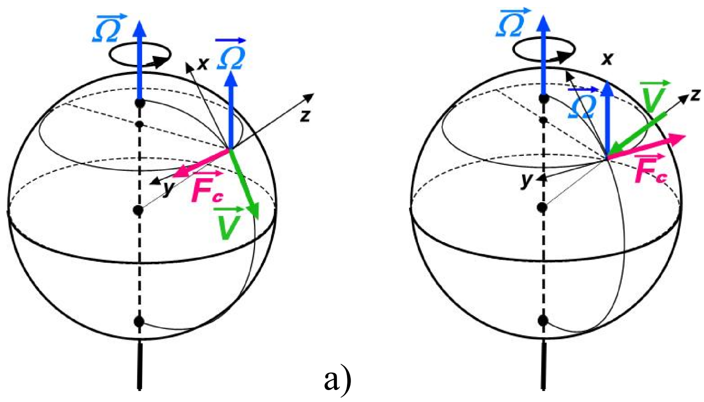
Дослідимо більш детально рівняння руху у системі, що обертається з постійною швидкістю,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + 2m\left[\vec{v}\times\vec{\Omega}\right] + m\left[\vec{\Omega}\times\left[\vec{r}\times\vec{\Omega}\right]\right]. \qquad (31.16)$$

Це важливо з точки зору руху тіл, що знаходяться на поверхні Землі. Для вивчення динаміки таких тіл найбільш цікавими і важливими є перший доданок і два останніх. А саме, перехід в систему, пов'язану з Землею, що обертається, призводить до появи в рівнянні двох (так званих «інерційних») додаткових сил. Сила $\vec{F}_c = 2m\left[\vec{v}\times\vec{\Omega}\right]$ називається ***силою Коріоліса***. Вона залежить від швидкості, але на відміну від сили тертя $-\eta\vec{v}$, спрямована перпендикулярно швидкості і не змінює енергії тіла. Сила $\vec{f} = m\left[\vec{\Omega}\left[\vec{r}\vec{\Omega}\right]\right]$ називається ***відцентровою силою***. Напрямок зазначених сил в залежності від координати і швидкості на поверхні сфери (Землі), що обертається, наведені на Рис.31.1 і 31.2. (Нагадаємо, що вектора швидкості обертання твердого тіла не залежать від вибору точки в ньому).

Відцентрова сила спрямована від осі обертання перпендикулярно цій осі (Рис.31.1), і дорівнює $f = m\rho\Omega^2 = mR\Omega^2\cos\vartheta$, де $\vartheta -$ північна широта (див.малюнок). При русі від північного полюса до екватора ця сила збільшується від нуля до $mR\Omega^2$, де $R -$ радіус Землі. Незважаючи на те, що відцентрова сила пропорційна квадрату частоти, вона не дуже мала. У всякому разі, космодроми намагаються будувати ближче до екватора, щоб при однаковій потужності ракети можна було виводити на орбіту більший корисний вантаж.





a) b)

Рис.31.1 Рис.31.2

Сила Коріоліса залежить від напрямку швидкості. На Рис.31.2а наведено випадок, коли швидкість спрямована уздовж меридіана на південь по поверхні, (уздовж осі x). На малюнках обрана система координат, в якій вісь x спрямована по меридіану на північ, вісь y – уздовж паралелі на захід, і вісь z від центру Землі перпендикулярно поверхні. При цьому сила Коріоліса спрямована строго на захід (уздовж осі y на Рис.31.2 а). Це призводить, наприклад, до того, що всі річки, що течуть у північній півкулі на південь, відчувають силу, що діє на захід. В результаті їх русло переміщається на захід, поки не дійде до сильної височини, яка зупинить це переміщення. В результаті у річок, що течуть на південь, високий західний берег. І навпаки, у річок з північної півкулі, що течуть на північ, високий східний берег.

Нарешті, якщо тіло рухається у напрямку до центру (уздовж осі z), то сила Коріоліса спрямована уздовж паралелі строго на схід (Рис.31.2b). Тому в суперечці з Гуком (який стверджував, що вільно падаюче тіло відхилитися на південь), Ньютон мав рацію.

Обчислимо відхилення на схід, нехтуючи в рівнянні руху відцентровою силою. В поле сили тяжіння $U=-mgr$ і рівняння (31.16) в компонентах запишеться так:

$$\dot{v}_x = 2\Omega_z v_y, \quad \dot{v}_y = 2\Omega_x v_z - 2\Omega_z v_x, \quad \dot{v}_z = -g - 2\Omega_x v_y. \tag{31.17}$$

Ця система лінійних рівнянь, звичайно, легко вирішується точно, але оскільки ми знехтували відцентровою силою, то вирішимо задачу наближено. Малим параметром наближення є величина $\Omega\tau = 2\pi\tau / T << 1$, де $T-$період обертання Землі, а $\tau-$час падіння. З третього рівняння в (31.17) знаходимо $v_z=-gt$ і $z=-gt^2/2$. Якщо тіло падає з висоти h, то час падіння $\tau=\sqrt{2h/g}$. Оскільки $v_x << v_z$, то з другого рівняння в (31.17) випливає, що $\dot{v}_y = -2\Omega_x gt$, $v_y = -\Omega_x gt^2$ і $y = -\Omega_x gt^3/3$. Отже, за час падіння вільно падаюче тіло відхилиться на схід на величину

$$\Delta y = -\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\Omega\cos\vartheta.$$

Через суперечку Ньютона з Гуком цікаво порівняти цей результат з відхиленням падаючого тіла на південь (по Гуку). При обліку тільки відцентрової сили рівняння (31.16) набуде вигляду

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{g} + \left[\vec{\Omega}\left[\vec{r}\vec{\Omega}\right]\right]. \tag{31.19}$$

У цьому рівнянні наближено можна замінити координату на радіус Землі $\vec{r} = R\vec{n}_z$. При цьому $\dot{v}_x = -\Omega_x\Omega_z R$ і $x = -\Omega_x\Omega_z Rt^2/2$. Повне відхилення на південь за час падіння τ становить

$$\Delta x = -\frac{Rh}{g}\Omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{31.20}$$

Таким чином, відношення відхилень на південь (Гук) і на схід (Ньютон) дорівнює $\Delta x/\Delta y = 3\Omega R\sin\vartheta/\sqrt{8gh}$ – відхилення на південь істотно перевершує відхилення на схід. Вони порівнюються тільки при киданні тіла з висоти $h \sim 10\,km$. Але що вважати відхиленням на південь? Це – відхилення від напрямку до центру Землі.

Реально за часів Ньютона йшлося про відхилення від лінії підвісу з точки кидання до поверхні Землі. Знайдемо відхилення лінії підвісу від напрямку до центру Землі (див. Рис.31.3, на якому кутові позначення не мають відношення до кутів Ейлера).

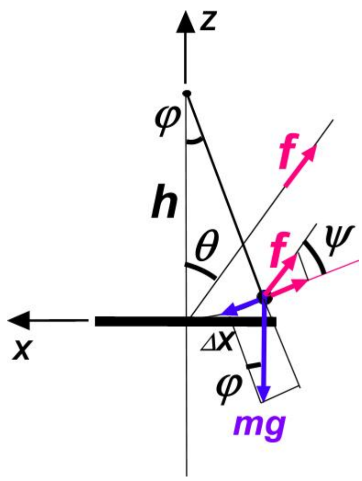


Рис.31.3

У стані рівноваги сили, що діють на підвіс, врівноважуються в напрямку, перпендикулярному лінії підвісу. Проекція сили тяжіння дорівнює $mg\sin\phi \approx mg\sin\left(arctg\left(\Delta x / h\right)\right) \approx mg\Delta x / h$. Проекція відцентрової сили дорівнює $f\cos\psi \approx f\cos\left(\pi - \vartheta\right) = f\sin\vartheta = mR\Omega^2\cos\vartheta\sin\vartheta$. З порівняння видно, що відхилення схилу в основному наближенні збігається з відхилення вільно падаючого тіла.